

## 1-09. 역학적 진동과 공진

### 1. 실험목적

본 실험은 용수철에 매달린 질량  $m$ 인 물체의 평형점에 대한 주기적 상하 운동을 통해 단조화운동 (simple harmonic motion: SHM)의 특성, 외부 구동력에 의한 강제진동을 통해 공진(resonance) 개념과 서로 다른 진동의 중첩에 의한 맥놀이(beats)를 조사한다.

### 2. 이론 및 원리

평형상태 (equilibrium state)하의 물리계에 작용하는 알짜 힘은 언제나 “0”이며, 이 경우 주어진 물리계가 놓여있는 곳을 평형위치 또는 “평형점 (equilibrium position)”이라 한다.



그림 1. 탄성이 없는 구리선의 변형 과정

그림 1은 탄성이 없는 구리선의 변형 과정을 연속적으로 보여주고 있다. 변형된 구리선은 원래상태로 되돌아가지 않고 구부러진 채로 그 형태를 유지하고 있음을 알 수 있다.



그림 2. 탄성을 가진 stainless steel ruler의 변형 과정

그림 2는 탄성을 가진 stainless steel ruler의 변형과 평형점 주위에 대한 진동을 보여주고 있다. 구리선과 달리 stainless steel ruler는 변형전의 상태로 되돌아 갈 때까지 진동을 유지하는 것을 볼 수 있다. 이와 같이 평형점으로 되돌아가게 하는 힘을 복원력 (restoring force)이라 한다. 그림 2의 경우에는 물체가 가진 탄성이 복원력으로 작용하여 평형위치 주위에 대한 주기적 운동을 지속시킨다. 만약 변위에 비례하는 복원력이 물체에 작용할 경우 물체는 평형점 주위에 대한 주기적 운동을 하게 되며 이러한 운동을 “단순조화운동 (simple harmonic motion)”이라 한다. 탄성계수  $k$ , 추의 질량이  $m$ 인 스프링진자의 운동방정식은 다음과 같이 주어진다.

$$\vec{F} = m\vec{a} = -k\vec{y} \quad \rightarrow \quad \therefore \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{k}{m}y = 0 \quad (1)$$

<1> 용수철진자의 단진동 (simple harmonic oscillation)

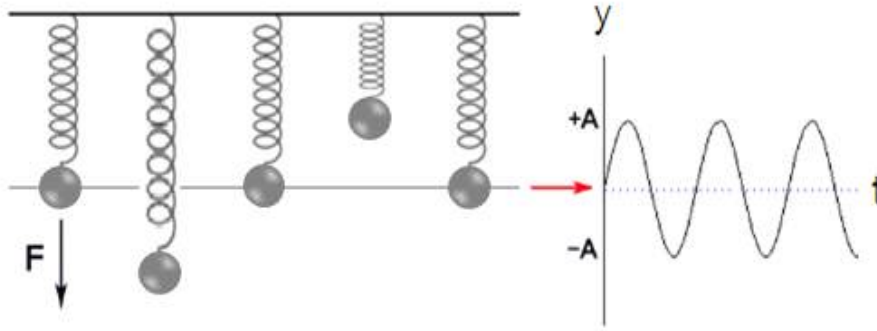


그림 3. 스프링에 매달려 있는 추의 진동

그림 3과 같이 스프링을 당겼다 놓으면 추는 평평점 주위로 진동하면서 주기적 운동을 하게 된다. 진폭이 주기적으로 변할 경우 시간에 따른 진폭변화는 간단한 주기함수(periodic function)로 표현된다.

$$\therefore y(t) = A \sin(\omega_0 t + \Phi) \quad (2)$$

식 (2)를 미분하면 식 (3)을 얻을 수 있으며, 식 (4)와 같이 정리할 수 있다.

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = -\omega_0^2 A \sin(\omega_0 t + \Phi) = -\omega_0^2 y(t) \quad (3)$$

$$\therefore \frac{d^2 y}{dt^2} + \omega_0^2 y = 0 \quad (4)$$

식 (1)로부터 식 (4)는 각진동수  $\omega_0 = (k/m)^{1/2}$ 로 진동하는 단조화운동에 대한 운동방정식임을 알 수 있다. 여기서  $\omega_0$ 를 자연진동수 (natural frequency) 또는 고유진동수라 하며 주기  $T$ 와의 관계는 다음과 같이 주어진다.

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow \therefore T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \quad (5)$$

<2> 강제진동과 공진 (forced oscillation and resonance)

각진동수  $\omega$ 로 진폭이 시간에 따라 변하는 외부 구동력  $F(t) = F_0 \cos \omega t$ 이 스프링진자에 작용할 경우 진동계의 운동방정식은 다음과 같이 주어진다.

$$y'' + \omega_0^2 y = \frac{F_0}{m} \cos \omega t \quad (6)$$

위 미분방정식의 해는  $\omega_0$ 로 진동하는 스프링진자와  $\omega$ 로 스프링진자를 강제진동시키는 구동력  $F_0 \cos \omega t$ 에 의한 두 조화진동의 선형결합으로 기술되며, 그 해는 다음과 같다.

$$\therefore y(t) = A \cos(\omega_0 t - \phi) + \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos \omega t \quad (7)$$

식 (7)에서  $\omega_0 = \omega$ 인 경우 진폭이 무한히 증가하게 되는데, 이러한 현상을 “공진(resonance)”이라 한다. 이는 자연진동수와 동일한 진동수를 가진 외부 구동력을 이용하여 스프링진자를 강제진동시킬 경우 두 계 사이에 에너지 전달효율이 최대가 된다는 것을 의미한다. 이와 같이 강제진동 시 공진조건이 만족되면 진폭이 무한히 증가하면서 주어진 진동계는 더 이상 안정한 상태를 유지할 수 없게 된다.

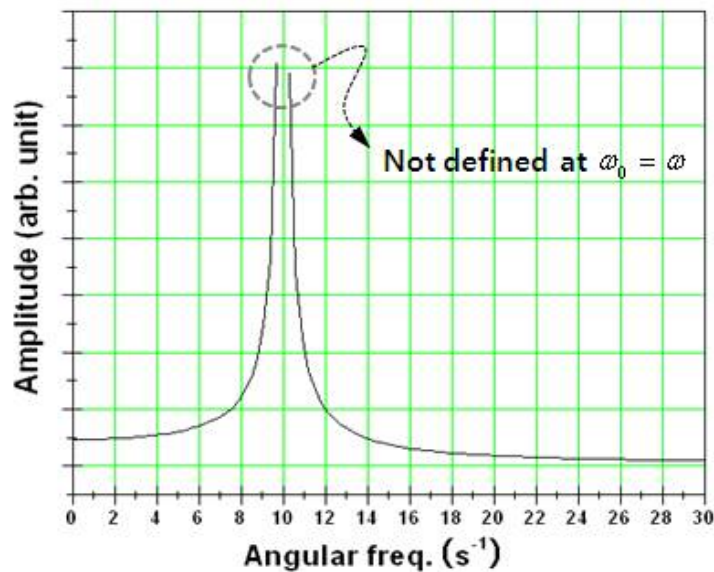


그림 4. 공진 곡선

그림 4는 공진주파수가  $10 \text{ s}^{-1}$ 인 경우에 대한 공진 곡선을 나타낸다. 공진주파수에서 진폭이 무한히 증가하는 것을 볼 수 있으며, 이는 높은 음의 소리를 이용하여 유리잔을 깨거나 강한 바람 때문에 다리가 파괴되는 현상 등의 원인이 된다.

### <3> 강제진동과 맥놀이 (forced oscillation and beats)

초기조건  $y(0) = 0, y'(0) = 0$ 로 스프링진자가 운동한다고 하자. 그리고 강제진동의 진동수는 근사적으로  $\omega \approx \omega_0$ 라 하자. 초기조건으로부터 식 (7)은 다음과 같이 주어진다.

$$\therefore y(t) = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \left[ 2 \sin\left(\frac{\omega_0 t + \omega t}{2}\right) \sin\left(\frac{\omega_0 t - \omega t}{2}\right) \right] \quad (8)$$

식 (8)에서  $\omega_0 - \omega$  값이 적을 경우 진폭의 변화는 두 sin항에 의해 결정된다. 진동수가 큰  $(\omega_0 + \omega)/2$ 와 진동수가 작은  $(\omega_0 - \omega)/2$  항의 곱에 의해 진폭변화가 일어난다. 이러한 현상을 "맥놀이 (beats)"라 하며 그림5는 맥놀이의 한 예를 나타낸다.

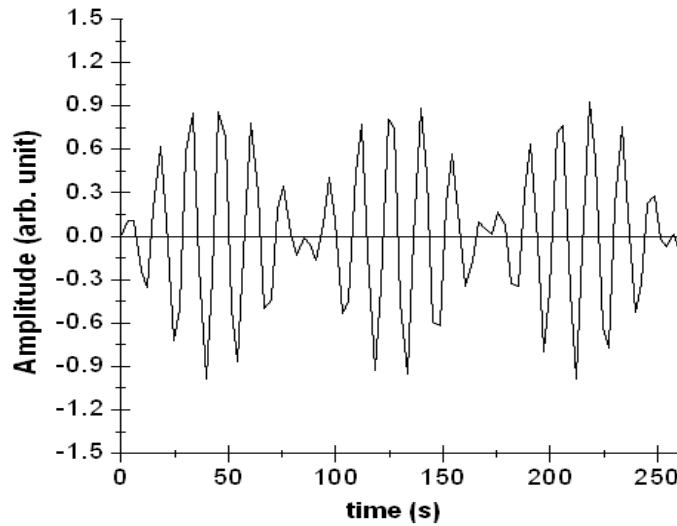


그림 5. 맥놀이 예

### 3. 실험장치 및 방법

#### 1) 실험장치

100cm 쇠자, 전자저울, 750 인터페이스, 역학진동자, 모션센서, 스프링, 추

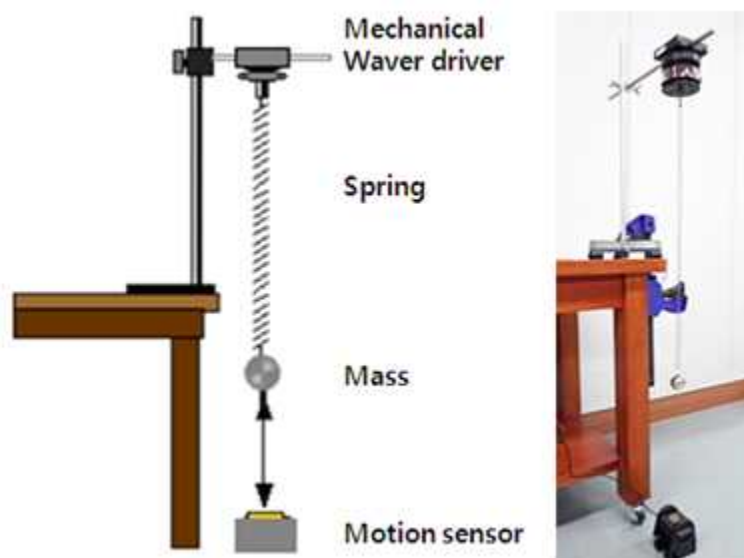


그림 6. 역학적 진동 실험장치도

2) 실험방법

<실험1> 고유진동수 측정

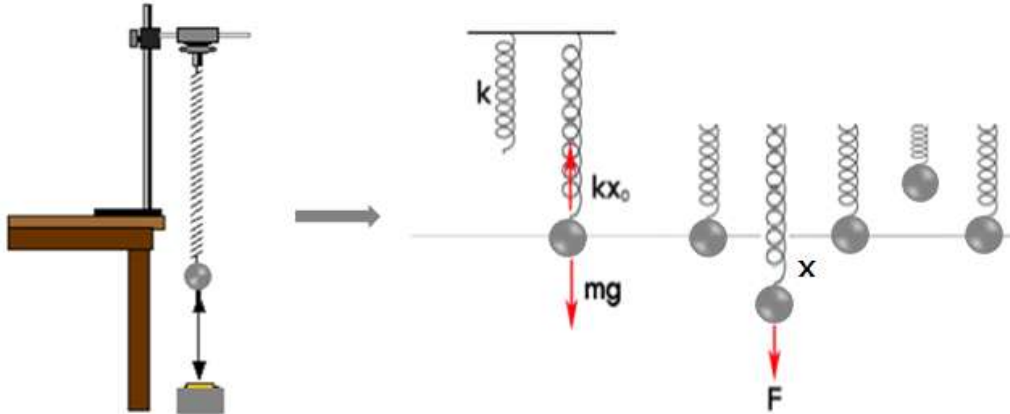


그림 7. 고유진동수를 측정하기 위한 실험 절차

- ① 추의 질량  $m$ 과 추를 매달기 전후 용수철의 길이 변화 ( $x_0$ )를 측정하여 기록한다.
- ② 위 그림처럼 용수철 진자와 모션센서를 일직선상에 배열한다. (단, 거리 변화를 정상적으로 측정하기 위해서는 추와 모션센서 사이의 거리를  $\sim 20\sim 30\text{cm}$ 로 조절한다.)
- ③ 모션센서가 연결된 750 인터페이스의 USB 단자를 컴퓨터에 연결한다.
- ④ DataStudio를 실행하고 모션센서를 설정한 다음 그래프의 "position"을 선택한다.
- ⑤ 그림 7과 같이 평형상태에 있는 추를  $\sim 5\text{cm}$  정도 당긴 후 놓는다.
- ⑥ DataStudio의 "start" 버튼을 눌러 그래프 상에 10회 정도 진동을 그린다.
- ⑦ 위 ⑥의 과정에 얻은 그래프의 파형으로부터 용수철 진자의 고유진동수를 구한다.
- ⑧ 위 ⑥의 과정에서 "위치", "속도", 그리고 "가속도" 그래프를 동시에 그린다.

<실험2> 강제진동을 이용한 공진주파수 측정

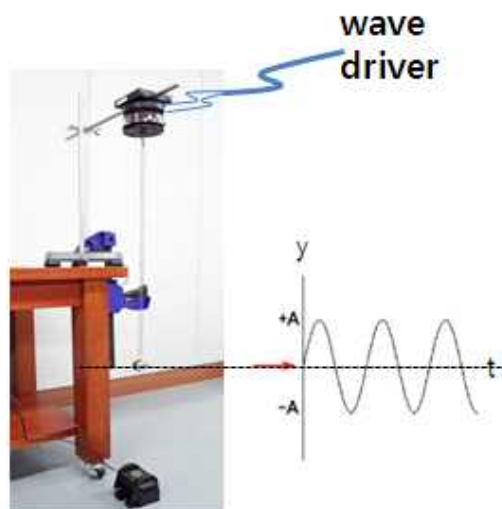


그림 8. 역학진동자(wave driver)를 이용한 강제진동

- ① 위 그림처럼 용수철 진자와 모션센서를 일직선상에 배열한다. (단, 거리 변화를 정상적으로 측정하기 위해서는 추와 모션센서 사이의 거리를 ~20~30cm로 조절한다.)
- ② 모션센서가 연결된 750 인터페이스의 USB 단자를 컴퓨터에 연결한다.
- ③ DataStudio를 실행하고 모션센서를 설정한 다음 “그래프”를 선택한다.



- ④ "Experiment setup" 창에서 “signal generator”를 선택한다.
- ⑤ Signal generator를 이용하여 “사인파, 진동수, 전압을 설정한 뒤 진동자를 작동시킨다. (단, 강제진동 시키기 전 추는 평형상태에 있어야만 한다. 출력전압은 3V가 적당하다.)
- ⑥ DataStudio의 시작 버튼을 눌러 진동이 30초 동안 지속되는 과정을 그래프로 얻는다.
- ⑦ 그래프 상에 나타난 진폭변화 중 최대진폭에 대응되는 값을 읽고 기록한다.
- ⑧ 고유진동수 근처에서 진동자의 주파수를 변화시켜가며 위 ⑤~⑦의 과정을 반복한다.
- ⑨ 그림 4와 같은 공진곡선을 얻는다.

<실험3> 강제진동에 의한 맥놀이 주파수 측정

- ① 위 <실험2>의 ①~⑥과정을 실행한다.
- ② 그래프 상에 나타난 진폭변화로부터 맥놀이 주기를 측정하고 기록한다.
- ③ 진동자의 진동수를 3~4회 변화시켜가며 위 과정을 반복한다. (각 진동수에서 그림 5와 같은 맥놀이 곡선을 얻는다.)



성 명: \_\_\_\_\_

학 번: \_\_\_\_\_

분반/조: \_\_\_\_\_

조 원: \_\_\_\_\_

담당교수: \_\_\_\_\_

담당조교: \_\_\_\_\_

실험일시:       년       월       일       요일       시

제출일시:       년       월       일       요일       시





4. 결과 및 분석

1) <실험1>에서 측정한 자료를 표 1과 2에 기록하고, 아래 주어진 평가들을 완성하라.

표 1. 추의 질량( $m$ )과 추를 매달기 전후 길이변화( $x_0$ ) 측정

Trial	$m$ (kg)	$x_0$ (m)
1		

표 2. 스프링진자의 주기 구하기

Trial	$10 T$ (s)	$T$ (s)
1		
2		
3		

㉑ 표 1의 자료를 이용하여 스프링 상수  $k$ 를 얻고, 이 값을 이용하여 스프링진자의 주기와 진동수를 평가하라. (단, 중력가속도,  $g = 9.8m/s^2$  이다.)

㉒ 표 2의 자료를 이용하여 단진동에 대한 평균 주기와 진동수를 구하고, 이 결과를 이론값 (위 ㉑의 결과)과 비교, 분석하고 상대오차를 평가하라.



© 한 주기 동안 추의 위치변화, 속도 그리고 가속도 그래프를 그리고 추가 어느 위치에 있을 때 속도와 가속도가 최대가 되는지를 관찰하고 그 결과에 대한 이유를 설명하라.

c-1) 위치-시간 그래프/ 속도-시간 그래프 / 가속도-시간 그래프

c-2) 단진동에 대한 운동방정식을 이용하여 위 그래프들의 관계를 해석하라.



2) <실험2>에서 측정한 자료를 표 3에 기록하고, 아래 주어진 평가들을 완성하라.

표 3. 진동수에 따른 진폭의 변화

Frequency, $f$ (Hz)	Amplitude, $A$ (m)	Frequency, $f$ (Hz)	Amplitude, $A$ (m)

㉑ 표 3의 자료를 이용하여 진동수에 따른 진폭의 변화를 그래프로 나타내고, 이 곡선으로부터 공진주파수를 결정하라.

㉒ 위 ㉑의 공진주파수와 <실험 1>의 ㉑에서 얻은 값과 비교해 보고, 이것으로부터 얻을 수 있는 물리적 결과를 논하라.



3) <실험3>에서 측정한 자료를 표 4에 기록하고, 아래 주어진 평가들을 완성하라.

표 4. 진동수에 따른 진폭의 변화

Trial, $N$	$f$ (Hz)	$T_-$ (s)	$T_+$ (s)	note
1				$f_0$ : 고유진동수 $T_-$ : $f_0 - f$ 에서의 주기 $T_+$ : $f_0 + f$ 에서의 주기
2				
3				
4				

㉠ <실험3>에서 얻은 모든 맥놀이 곡선들을 한 그래프 상에 나타내고, 이 그래프의 정보를 이용하여 표 4를 완성하라.





㉞ 식 (8)을 이용하여 표 4에 주어진 각 주파수에서의 맥놀이 주기와 진동수를 계산하고, 이 값들을 표 4의 실험결과 ( $T_-$ ,  $T_+$ )와 비교해 보라.

㉟  $|\Delta f|$ 의 크기와 맥놀이의 배의 수 (또는 마디의 수) 사이에는 어떤 관계가 있는가?



5. 결론 (본 실험을 통해 얻은 결과를 간단히 기술하라.)

6. 참고자료

