

1-6. 다양한 형태의 강체들에 대한 관성모멘트 측정

1. 실험목적

본 실험은 여러 형태 (원판, 고리, 막대 등)의 물체들에 대해 관성모멘트 측정 장치를 이용하여 회전운동과 선형운동을 비교, 분석하고 관성모멘트 크기를 직접 측정해 봄으로써 관성모멘트의 물리적 의미를 이해하게 된다.

2. 이론 및 원리

여러 질점 (mass point)들로 이뤄진 강체 (rigid body)의 운동은 병진운동과 회전운동으로 구성되어 있다. 병진운동과 회전운동이 독립적으로 평형상태를 만족할 때 주어진 강체는 평형상태에 있다고 하며, 이러한 강체의 평형상태를 정적평형상태 (static equilibrium state)라 한다. 병진운동과 회전운동에 있어 “운동상태를 변화시키는 원인”은 각각 병진 힘과 돌림힘이다.

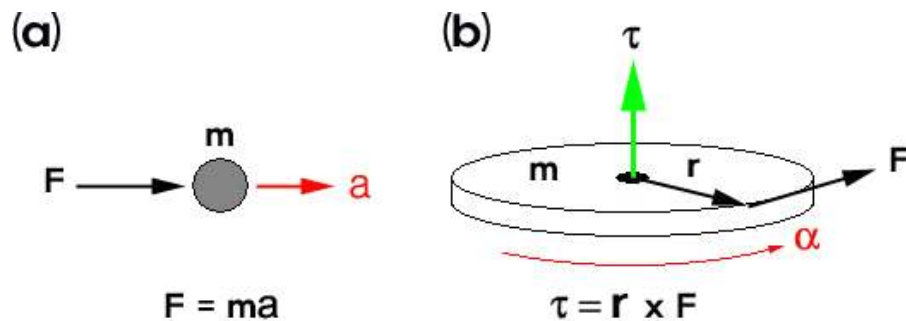


그림 1. 병진힘 (a)과 돌림힘 (b)

뉴턴의 운동 제2법칙에서 비례상수로 도입된 질량, m 은 병진운동에 있어 상태변화를 방해하는 척도로 “관성질량”이라고도 한다. 따라서 질량이 클수록 관성이 크기 때문에 자신의 운동상태를 유지하려는 능력이 질량이 작은 물체보다 크다는 것을 알 수 있다. 뉴턴 제2법칙에 의해 정의되는 힘, 가속도 그리고 질량 사이의 관계는 다음과 같이 주어진다.

$$\therefore \vec{F} = m \vec{a} = \frac{d\vec{p}}{dt}, \quad m = \frac{F}{a} \propto \frac{1}{a} \quad (1)$$

물체의 회전운동은 방향과 크기가 매순간 변하는 병진운동의 연속적 변화에 의해 묘사될 수 있기 때문에 병진운동과 회전운동을 기술하는 운동방정식의 형태는 동일하게 된다. 그림 1(b)에서와 같이 반지름 r 인 원판에 접선방향으로 힘이 작용하게 되면 회전력이 발생하게 되며, 각가속도, α 로 가속운동을 하게 된다. 돌림힘, 즉 토크는 다음과 같이 정의된다.

$$\therefore \vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = rF \sin\theta \hat{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt} \quad (2)$$

식 (1)과 (2)로부터 병진힘과 돌림힘을 비교해 보면 다음과 같다.

$$\therefore \tau = rF = rma = I\alpha = (mr^2)\alpha \Leftrightarrow F = (m)a \quad (3)$$

병진운동과 회전운동은 본질적으로 동일한 운동이기 때문에 식 (3)에서 τ 와 F 는 동일한 식의 형태를 가지게 된다. 위의 식 (3)에서 병진운동의 가속도 a 는 회전운동의 각가속도 α 와 대응되며, 병진운동에서의 질량 m 은 회전운동의 mr^2 에 대응됨을 알 수 있다. mr^2 은 회전운동에서 회전체의 질량에 대응되며, 관성모멘트, I 라고 한다. 관성모멘트는 회전체가 자신의 회전운동상태를 유지하려는 능력, 즉 회전체의 관성능률을 의미하며 병진운동에서의 관성질량에 대응되는 물리량이다. 관성모멘트는 식 (4)와 같이 정의되며, 질점들이 회전축으로부터 멀리 분포할수록 (반지름 r 이 클수록), 질량 m 이 클수록 관성모멘트도 커진다는 것을 알 수 있다. I 의 단위는 $[kg \cdot m^2]$ 이며 차원은 ML^2 으로 표현된다.

$$\therefore I = mR^2 \Rightarrow I \propto m, \quad I \propto r^2 \quad (4)$$

그림 2를 통해 물체의 모양에 따른 관성모멘트, 즉 회전을 유지하려는 능력을 조사해 보자. 질량과 각속도가 동일한 물체들 (a, b, c, d)이 회전축을 중심으로 반시계 방향으로 회전하고 있다.

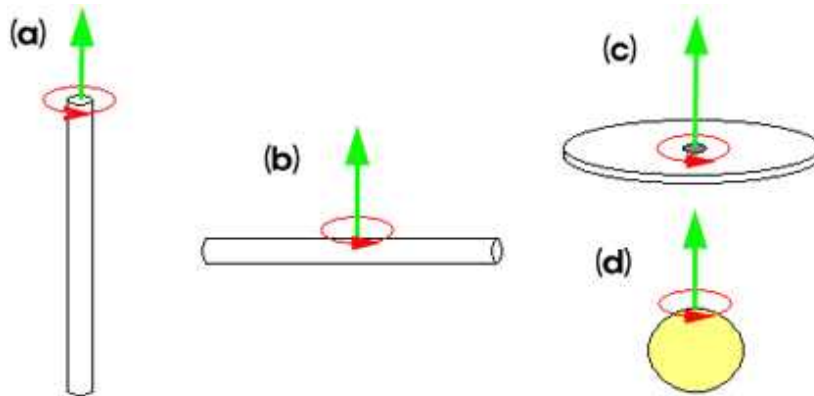


그림 2 다양한 강체들의 관성모멘트 크기

관성모멘트가 클수록 회전운동상태를 변화시키는 것이 힘들기 때문에 위의 그림 2에 주어진 물체들의 회전축에 대한 질점분포로부터 관성모멘트의 크기정도를 짐작할 수 있다. 위의 경우 관성모멘트가 가장 큰 물체는 (c)이며, 가장 적은 물체는 (a)이다. 관성모멘트의 크기에 따라 물체를 배열하면 $c > b > d > a$ 가 됨을 알 수 있다. 아래의 그림 3은 몇몇 회전체들에 대한 관성모멘트를 각각 나타낸다. n 개의 질점으로 구성된 강체와 연속적인 질량분포로 구성된 강체의 관성모멘트는 다음과 같이 주어진다.

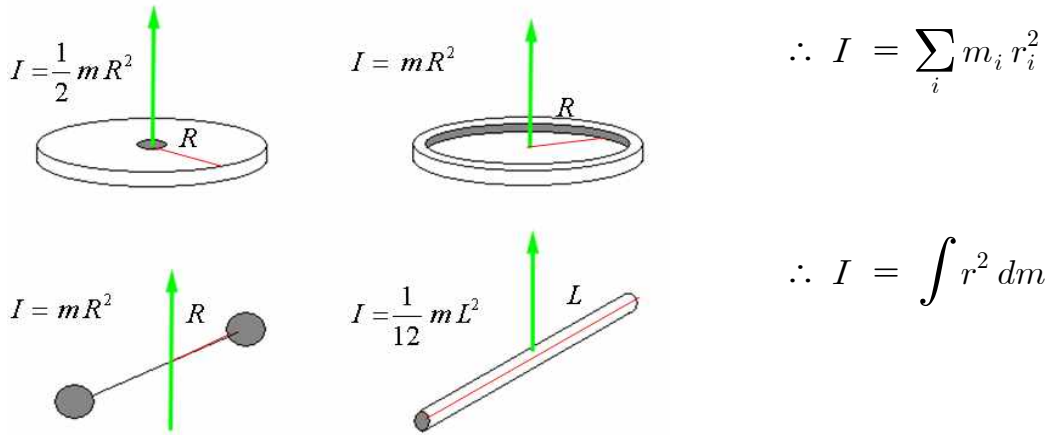


그림 3. 원판, 고리, 아령, 막대의 관성모멘트

관성모멘트 측정장치를 이용하여 주어진 물체의 관성모멘트를 측정하는 방법을 조사해 보자. 그림 4는 질량 m 인 추가 떨어지면서 원판을 시계방향으로 회전시키는 것을 보여준다.

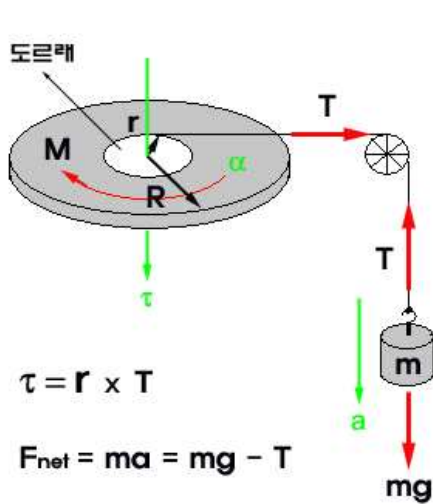


그림 4에서 τ 와 F_{net} 는 원판에 작용하는 회전력과 추에 작용하는 알짜 힘을 각각 나타낸다. 그리고 a 와 α 는 원판의 각가속도와 추의 가속도를 나타낸다. 추의 무게가 원판에 부착되어 있는 도르래에 접선 방향으로 힘을 작용하여 $\vec{r} \times \vec{F}$ 의 돌림힘을 작용하게 된다. 이 경우 도르래의 질량은 원판에 비해 아주 작기 때문에 무시할 수 있다. 추에 작용하는 알짜 힘은 줄의 장력과 중력으로 구성되어있다.

$$\therefore F_{net} = ma = mg - T \quad (5)$$

위의 식을 이용하여 회전력 τ 와 관성모멘트 I 를 표현하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

그림 4. 관성모멘트 측정장치도

$$\therefore \tau = rT = rm(g - a) = I\alpha \quad (6)$$

$$\therefore I = \frac{\tau}{\alpha} = \frac{mr(g - a)}{a/r} = \frac{mr^2(g - a)}{a} \quad (7)$$

이 경우 관성모멘트는 추의 가속도, a 를 측정함으로써 결정된다.

관성모멘트 측정장치를 이용하여 주어진 물체의 관성모멘트를 측정하는 또 하나의 방법은 역학적 에너지보존법칙을 이용하는 것이다. 강체의 운동에너지는 병진운동에너지와 회전운동에너지의 합으로 주어진다. 그림 4에서와 같이 질량 m 인 추가 정지 상태에서부터 t 시간 동안 h 만큼 떨어지면서 원판을 회전시키면 에너지보존법칙은 다음의 관계를 만족 한다.

$$\therefore mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 \quad (8)$$

여기서 v 는 추가 h 만큼 내려왔을 때의 속도로서 추는 중력에 의한 등가속도운동을 하므로 v 와 h 사이의 관계는 다음과 같이 주어진다.

$$v = at, \quad h = \frac{1}{2}at^2 \quad \Rightarrow \quad \therefore v = \frac{2h}{t^2} \cdot t = \frac{2h}{t} \quad (9)$$

식 (9)의 v 와 $\omega = v/r$ 를 식 (8)에 대입한 후, I 에 대해 정리하면 다음과 같다.

$$\therefore I = mr^2 \left(\frac{gt^2}{2h} - 1 \right) \quad (10)$$

3. 실험장치 및 방법

1) 실험장치

A베이스, 원판 및 고리, 도르래, 포토게이트, 750 인터페이스, 쇠자, 버니어캘리퍼스, 저울, 추와 추걸이, 스마트폴리, 실



2) 실험방법

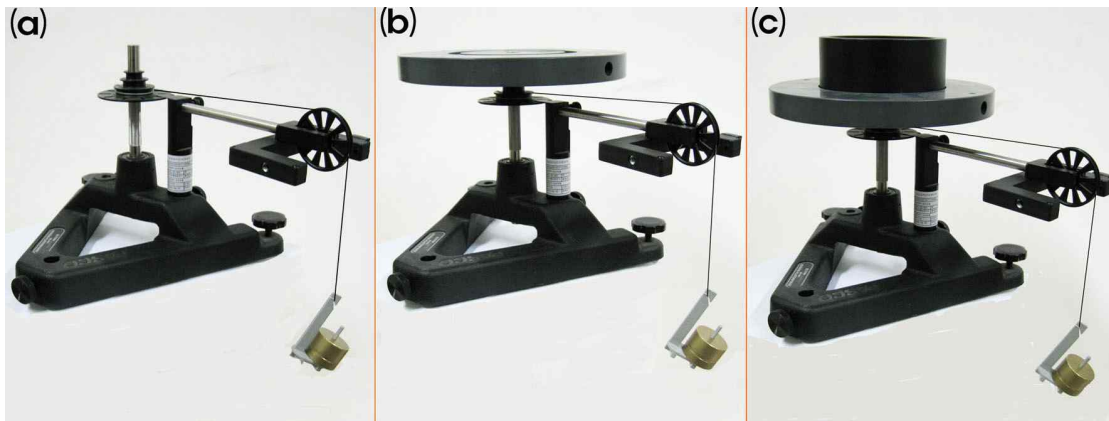


그림 5. 관성모멘트 실험 측정을 위한 실험장치도

<실험1> 회전축의 관성모멘트 측정 (I_0)

- ① A형 받침대 위의 중심축에 3단 도르래를 장착한 다음 스마트폴리를 설치한다.
- ② 3단 축바퀴의 직경을 측정하여 기록하고, 3단 축바퀴 중의 한 곳을 선택한 후 선택된 축바퀴의 구멍에 실을 끼워 고정한다. (실의 길이는 120 cm가 적당.)
- ③ 실의 나머지 한쪽 끝을 추걸이에 연결하고, 추걸이에 100g의 추를 매달아 스마트폴리에

걸어 놓는다. (추결이의 질량: 5g)

④ 그림 (a)와 같이 실이 감겨져 있는 도르래의 접선방향과 스마트폴리에 걸려있는 실이 일직선이 되도록 스마트폴리 지지대를 이용하여 조절한다.

⑤ “750 인터페이스”의 “Digital channel” 1에 포토게이터 플러그를 연결한다.

⑥ “750 인터페이스”를 켜 다음, 컴퓨터에 연결한다.

⑦ 컴퓨터 화면상에 있는 “DataStudio”  를 실행시킨다.

⑧ “Welcome to DataStudio” 창에서 “Create Experiment”  를 선택한다.

⑨  에 있는 “Digital Channel”의 1 을 클릭한다.

⑩ 다음 창에서 “smart pulley”를 선택하고 “OK” 버튼을 누른다.

⑪ “smart pulley” 구동을 위한 상수 및 측정방법 (속도)을 지정한다.

- “Constants”를 클릭한 후 도르래의 정보를 입력한다. (이미 설정되어 있음.)


- “Measurements”에서 “velocity, Ch 1”을 선택한다.

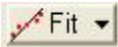
⑫ “DataStudio” 화면 좌측 아래에 있는 “Displays” 목록 중 “Graph”를 선택한 후 “Velocity, Ch 1”을 선택하고 “OK” 버튼을 누른다.

⑬ 추결이의 추가 스마트폴리 바로 아래 위치하도록 축바퀴를 돌려 실을 감는 후, 회전축을 손으로 잡아 정지상태를 유지 한다.

⑭ “start” 버튼을 누른 후 회전축을 잡고 있던 손을 떼다.

⑮ 추가 지면에 도달하기 직전 “stop” 버튼을 누른다.

⑯ “scale to fit”  을 이용하여 속도-시간 그래프의 선형구간을 선택한다. (등가속운동)

⑰ “Curve fits”  를 이용하여 속도-시간 그래프 상의 선택된 구간에 대해 “Linear fit”를 실행한 후 주어진 그래프의 기울기인 가속도를 얻게 된다.

⑱ 가속도, 회전축의 반지름 그리고 추와 추결이의 질량을 이용하여 식 (7)로부터 회전축의 관성모멘트 (I_0)를 결정하게 된다.

⑱ 가속도를 5회 측정하여 평균값을 얻고, 이 값을 참값으로 한다.

<실험2> 원판의 관성모멘트 측정 (I_D)

① 그림 5(b)와 같이 회전축에 원판을 장착한 후, 위 ⑬~⑰ 과정에 따라 실험을 수행한다.

② 이 경우 측정된 관성모멘트는 회전축과 원판에 의한 관성모멘트의 총합이다.

③ 원판의 관성모멘트는 $I_D = I_{D+0} - I_0$ 가 된다.

<실험3> 고리의 관성모멘트 측정 (I_R)

① 그림 5(c)와 같이 회전축에 원판을 장착한 후 원판위에 고리를 올려놓는다.

② 위의 ⑬~⑰ 과정에 따라 실험을 수행한다.

③ 이 경우 측정된 관성모멘트는 회전축, 원판 그리고 고리에 의한 관성모멘트의 총합이다.

④ 고리의 관성모멘트는 $I_R = I_{D+R+0} - I_D - I_0$ 가 된다.



성 명: _____

학 번: _____

분반/조: _____

조 원: _____

담당교수: _____

담당조교: _____

실험일시: _____ 년 _____ 월 _____ 일 _____ 요일 _____ 시

제출일시: _____ 년 _____ 월 _____ 일 _____ 요일 _____ 시

4. 결과 및 분석

1) <실험1>의 결과를 아래 표에 기록하고, 이 자료를 이용하여 주어진 평가들을 완성하라.

표 1. 회전축의 관성모멘트

Trial	$a \text{ (m/s}^2\text{)}$	Note
1		회전축의 반경: $r =$ (m)
2		
3		
4		추의 질량: $m =$ (g)
5		추 걸이의 질량: $m' =$ (g)
평균값		

㉠ 표 1의 자료를 이용하여 회전축의 관성모멘트를 계산하라. (계산과정을 상세히 기술하고, 표준편차를 포함한 결과를 제출하라.)

2) <실험2>의 결과를 아래 표에 기록하고, 이 자료를 이용하여 주어진 평가들을 완성하라.

표 2. 원판의 관성모멘트

Trial	a (m/s^2)	Note
1		회전축의 반경: $r =$ (m)
2		
3		원판의 반지름: $R =$ (m)
4		원판의 질량: $M =$ (g)
5		
평균값		추+추 길이: $m' =$ (g)

㉠ 표 2의 자료와 1)-㉠ 결과를 이용하여 원판의 관성모멘트를 평가하라. 그리고 주어진 원판의 관성모멘트를 이론적으로 계산하고 그 결과를 실험값과 비교하여 상대오차를 평가하라.

- $I_D = \frac{1}{2}MR^2$ (오차가 발생할 경우 그 원인을 설명하라.)

3) <실험3>의 결과를 아래 표에 기록하고, 이 자료를 이용하여 주어진 평가들을 완성하라.

표 3. 고리의 관성모멘트

Trial	$a (m/s^2)$	Note
1		회전축의 반경: $r =$ (m)
2		고리의 반지름: $R_{내경} =$ (m)
3		고리의 반지름: $R_{외경} =$ (m)
4		고리의 질량: $M =$ (g)
5		추+ 추 걸이: $m' =$ (g)
평균값		

㉠ 1)-㉠, 2)-㉠ 그리고 표 3의 자료를 이용하여 고리의 관성모멘트를 평가하라. 그리고 주어진 고리의 관성모멘트를 이론적으로 계산하고 그 결과를 실험값과 비교하여 상대오차를

평가하라. - $I_R = \frac{1}{2}M(R_{in}^2 + R_{out}^2)$ (오차가 발생할 경우 그 원인을 설명하라.)

- ⑤ 아래 그림과 같이 원판의 세로축에 대한 관성모멘트를 동일한 실험절차를 이용하여 평가하고, 그 결과를 이론값과 비교하라. ($I = \frac{1}{4}MR^2$)



㉔ 2)-㉑와 3)-㉒ 결과로부터 회전축에 대한 질점의 분포가 관성모멘트에 어떠한 영향을 미치는지 설명해 보라.

㉕ 선형운동에 있어서 질량과 회전운동에서의 관성모멘트가 서로 어떠한 관계가 있는지 논해보고 관성모멘트의 물리적 정의를 간단히 기술하라.

5. 결론 (본 실험을 통해 얻은 결과를 간단히 기술하라.)

6. 참고자료

